*研究简讯*

# 线性与非线性发展方程差分格式计算稳定性的比较分析*

林万涛[①] 季仲贞[①] 李双林[①] 杨晓忠[②]

(①中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室,北京 100029;
②华北电力大学,北京 102206)

**摘要** 针对线性与非线性发展方程的几种差分格式,以一维线性和非线性平流方程为例,对线性与非线性发展方程差分格式的计算稳定性进行了比较分析,揭示了差分格式结构和初值形式与计算稳定性的关系. 理论分析和数值试验证明,线性与非线性发展方程差分格式计算稳定性在本质上是完全不同的.

**关键词** 发展方程 差分格式 计算稳定性 初值

气候数值模拟、数值天气预报和海流数值模拟都可以归结为对发展方程的数值求解. 因此,如何保证所用的差分格式长时间计算稳定是十分重要的. 线性发展方程差分格式计算稳定性,1950 年 Von Neumann 首先用 Fourier 分析的方法给出了稳定性判据. 之后,Hirt[1] 又提出了一种分析线性发展方程差分格式计算稳定性的方法,即启发性分析方法. 到目前为止,线性发展方程差分格式计算稳定性问题已基本解决. 对于非线发展方程差分格式计算稳定性问题,至今尚未找到一种普遍的判定方法. 曾庆存、季仲贞、王斌等[2~6] 系统地研究了非线性发展方程差分格式的计算不稳定问题,探讨了产生非线性计算不稳定的原因. 本文以一维线性和非线性平流方程为例,通过对线性与非线性发展方程差分格式计算稳定性的比较分析,揭示了差分格式结构和初值形式与计算稳定性的关系.

## 1 方程和差分格式

考虑一维线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad U > 0,\ a \leqslant x \leqslant b,\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

和一线非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad a \leqslant x \leqslant b,\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

2000-01-09 收稿,2000-03-02 收修改稿

* 国家重点基础研究项目(编号: G1999032801)、国家杰出青年科学基金项目(批准号: 49825109)及国家自然科学基金项目(批准号: 49975020)共同资助

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{4}$$

对问题(1),(2)式及(3),(4)式采用如下差分格式：

**格式 1**(FTBS 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{U}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0. \tag{5}$$

**格式 2**(Lax-Wendroff 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{U}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{U^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0. \tag{6}$$

**格式 3**(FTBS 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0. \tag{7}$$

**格式 4**(Lax-Wendroff 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{(u_j^n)^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0. \tag{8}$$

## 2 差分格式计算稳定性的比较分析

首先对线性平流方程的差分格式 1,2 进行稳定性的启发性分析．以格式 2 为例,将(6)式作 Taylor 展开可得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u_j^n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial t^2}\Delta t + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u_j^n}{\partial t^3}\Delta t^2 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \tag{9}$$

$$\frac{U}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = U\left(\frac{\partial u_j^n}{\partial x} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u_j^n}{\partial x^3}\Delta x^2\right) + O(\Delta x^4), \tag{10}$$

$$\frac{U^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \frac{U^2}{2}\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x^2}\Delta t + \frac{U^2\Delta x^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Delta t + O(\Delta x^4). \tag{11}$$

把(9),(10),(11)式代入(6)式,略去上下标可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} = &-\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - U^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\left(\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + U\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\right.\\ &-\frac{1}{24}\Delta t\left(\Delta t^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - U^2\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + O(\Delta t^4, \Delta x^4).\end{aligned} \tag{12}$$

(12)式对 $t$ 微商,可得[7]

$$-\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - U^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{6}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2 - \Delta x^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta t^4,\ \Delta t^2\Delta x^2), \tag{13}$$

$$-\frac{1}{6}\left(\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + U\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{6}U(U^2\Delta t^2 - \Delta x^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t^4,\ \Delta t^2\Delta x^2), \tag{14}$$

$$-\frac{1}{24}\Delta t\left(\Delta t^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - U^2\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) = \frac{1}{24}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2 - \Delta x^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta t^4,\ \Delta t^2\Delta x^2), \tag{15}$$

将(13),(14),(15)式代入(12)式便可得到格式 2 的修正微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{6}U(U^2\Delta t^2 - \Delta x^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{8}U^2\Delta t(U^2\Delta t^2 - \Delta x^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$+ O(\Delta t^4, \Delta t^2 \Delta x^2). \tag{16}$$

由(16)式可知,格式 2 的二阶耗散系数为 0,四阶耗散系数为

$$\mu_{2r} = \frac{1}{8} U^2 \Delta t (U^2 \Delta t^2 - \Delta x^2), \qquad r = 2. \tag{17}$$

同样可求出格式 1 的修正微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} U(U\Delta t - \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} U(U\Delta t - \Delta x)(2U\Delta t - \Delta x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t^3, \Delta t \Delta x^2). \tag{18}$$

二阶耗散系数为

$$\mu_{2r} = -\frac{1}{2} U(U\Delta t - \Delta x), \qquad r = 1. \tag{19}$$

格式 1,2 计算稳定的充分必要条件为[7]

$$(-1)^{r-1} \mu_{2r} > 0. \tag{20}$$

于是有以下定理:

**定理 1** 一维线性平流方程差分格式 1(FTBS 格式)和格式 2(Lax-Wendroff 格式)计算稳定的充分必要条件为

$$U \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1. \tag{21}$$

下面对非线性平流方程的差分格式 3,4 进行稳定性的启发性分析. 以格式 4 为例,将(8)式作 Taylor 展开可得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u_j^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j^n}{\partial t^2} \Delta t + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_j^n}{\partial t^3} \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \tag{22}$$

$$\frac{u_j^n}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = u_j^n \left( \frac{\partial u_j^n}{\partial x} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_j^n}{\partial x^3} \Delta x^2 \right) + O(\Delta x^3), \tag{23}$$

$$\frac{(u_j^n)^2 \Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \frac{(u_j^n)^2}{2} \frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x^2} \Delta t + O(\Delta x^2). \tag{24}$$

把(22),(23),(24)式代入(8)式,略去上下标可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{6} \left( \Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + u \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(\Delta t^3, \Delta x^2). \tag{25}$$

由(25)式可以看出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta t, \Delta x^2). \tag{26}$$

(26)式对 $t$ 微商,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t, \Delta x^2), \tag{27}$$

将(27)式对 $t$ 微商,可得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -6u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 - 9u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t, \Delta x^2). \tag{28}$$

将(27),(28)式代入(25)式便得到格式 4 的修正微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\Delta tu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\Delta t^2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\frac{3}{2}\Delta t^2u^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}(\Delta t^2u^3-\Delta x^2u)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\ \Delta t\Delta x^2).\tag{29}$$

同样可求出格式 3 的修正微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{x}=-\Delta tu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\Delta t^2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{2}\left(3\Delta t^2u^2\frac{\partial u}{\partial x}-\Delta tu^2+\Delta xu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}(\Delta t^2u^3-\Delta x^2u)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\ \Delta t\Delta x).\tag{30}$$

于是,格式 3 的二阶耗散系数为

$$\mu_2=\frac{1}{2}\left(3\Delta t^2u^2\frac{\partial u}{\partial x}-\Delta tu^2+\Delta xu\right).\tag{31}$$

格式 4 的二阶耗散系数为

$$\mu_2=\frac{3}{2}\Delta t^2u^2\frac{\partial u}{\partial x}.\tag{32}$$

只有当二阶耗散系数 $\mu_2$ 为正时,格式 3,4 才是计算稳定的[8]. 当然,这就要求 $\mu_2$ 在 $t=0$ 时为正. 于是有以下定理:

**定理 2**　一维非线性平流方程差分格式 3(FTBS 格式)计算稳定的必要条件为

$$3\Delta t^2u^2(x,0)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}-\Delta tu^2(x,0)+\Delta xu(x,0)>0.\tag{33}$$

**定理 3**　一维非线性平流方程差分格式 4(Lax-Wendroff 格式)计算稳定的必要条件为

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}>0.\tag{34}$$

通过以上分析可得如下推论:

**推论 1**　一维线性平流方程差分格式的计算稳定性只与差分格式的结构有关,与初值的形式无关.

**推论 2**　一维非线性平流方程差分格式的计算稳定性不仅取决于差分格式的结构,还取决于初值及其偏导数的形式.

## 3　数值试验

我们做如下的数值试验,进一步对一维线性与非线性平流方程差分格式的计算稳定性与格式结构和初值的关系进行比较分析. 取如下 4 个初值:

1. $u(x,0)=x$,　2. $u(x,0)=-x$,　3. $u(x,0)=1-e^{-x}$,　4. $u(x,0)=1-e^{x}$.

其中 $0\leqslant x\leqslant 1$,　$0\leqslant t\leqslant 10$.

取 $\Delta x=0.01$, $\Delta t=0.001$, $U=1$,计算结果见表 1.

表 1　数值试验计算结果

| | 格式 1 | 格式 2 | 格式 3 | 格式 4 |
|---|---|---|---|---|
| 初值 1 | 稳定 | 稳定 | 稳定 | 稳定 |
| 初值 2 | 稳定 | 稳定 | 不稳定 | 不稳定 |
| 初值 3 | 稳定 | 稳定 | 稳定 | 稳定 |
| 初值 4 | 稳定 | 稳定 | 不稳定 | 不稳定 |

由计算结果可以看出,格式1,2由于满足定理1,所以对初值1~4均计算稳定.格式3,4对初值1,3分别满足定理2,3所给定的条件,是计算稳定的;对初值2,4不满足定理2,3所给定的条件,因此计算不稳定.

## 4 结果与讨论

通过对线性与非线性发展方程差分格式计算稳定性的比较分析和数值试验,证实了非线性发展方程差分格式的计算稳定性与线性发展方程差分格式的计算稳定性在本质上是完全不同的.非线性发展方程差分格式的计算稳定性必须把差分格式的结构同初值及其偏导数形式结合起来分析才有意义.

## 参 考 文 献

1 Hirt C W. Heuristic stability theory for finite-difference equations. J Comp Phys, 1968, 2: 339
2 曾庆存. 计算稳定性的若干问题. 大气科学, 1978, 2(3): 181
3 季仲贞. 二维 Lilly 格式非线性计算不稳定的例子. 科学通报, 1980, 25(19): 890
4 曾庆存, 季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题. 计算数学, 1981, 3(1): 79
5 季仲贞. 非线性计算稳定性的比较分析. 大气科学, 1981, 4(4): 344
6 季仲贞, 王 斌, 曾庆存. 计算地球流体力学若干新进展. 空气动力学学报, 1998, 16(1): 108
7 Warming R F, Hyett B J. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. J Comp Phys, 1974, 14: 159
8 吴江航, 韩庆书. 计算流体力学的理论、方法及应用. 北京: 科学出版社, 1988. 114~117